

Facharbeit
aus der Mathematik

**Chaotische dynamische Systeme
am Beispiel des Feigenbaum-
Diagramms und der Juliamengen**

Verfasser Michael Dyrna

Leistungskurs Mathematik

Kursleiter Herr Brenner

Erzielte Note _____

Erzielte Punkte _____
(einfache Wertung)

Datum der Abgabe im Kollegstufensekretariat

Unterschrift des Kursleiters

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Begriffe	4
2.1	Orbit	4
2.2	Fixpunkt	5
2.3	Flucht- und Gefangenenmenge	5
3	Das Feigenbaum-Diagramm am Beispiel von $f_a(x) = ax(1-x)$	6
3.1	Das Feigenbaum-Diagramm	6
3.2	Der Bereich $a \in [1;3[$	6
3.3	Der Bereich $a \in [3;3,449[$	7
3.4	Der Bereich $a \in [3,449;s_{\infty}[$	7
3.5	Der Bereich $a \in [s_{\infty};\infty[$ (<i>Chaos</i>)	8
4	Die Juliamengen	9
4.1	Definition	9
4.2	Die Juliamenge J_0	9
4.3	Symmetrie	10
4.4	Beschränktheit	10
4.5	Zusammenhang mit der Mandelbrotmenge	11
A	Die Programme FEIGEN.PAS und JULIA.PAS	13
B	Literatur	16
C	Erklärung	16

1 Einleitung

Einige Wissenschaftler sehen in den Erkenntnisse der Chaosforschung eine ähnliche Revolution für die Mathematik wie für die Physik in der Quantenmechanik, ja eine neue wissenschaftliche Denkweise. Andere warnen davor, die Chaosforschung, deren Anfänge „erst“ ungefähr einhundert Jahre zurückliegen, überzubewerten.

Unumstritten ist, dass Bilder fraktaler Mengen einen starken ästhetischen Reiz ausüben und so nicht nur bei Mathematikern reges Interesse finden. Auch Menschen, die der Mathematik fernstehen, begeistert die faszinierende Schönheit von Julia-Abbildungen und „Apfelmännchen“. Die Bemalung der Garderobeschränkchen im Erdgeschoß unserer Schule zum Beispiel bestätigt dies.

Zu dieser Facharbeit

Zunächst definiert diese Facharbeit einige grundlegende Begriffe, die für die Beschäftigung mit dynamischen Systemen notwendig sind. Weiterhin behandelt sie das Feigenbaum-Diagramm und die Juliamengen als Beispiele für chaotische dynamische Systeme. Sie ist „nur“ als eine Einführung in eine am Anfang stehende, aber dennoch sehr interessante und umfangreiche Wissenschaft zu verstehen. Die darin erläuterten Erkenntnisse halten sich daher leicht verständlich und in gewisser Weise oberflächlich.

Die Kenntnis der komplexen Zahlen wird als bekannt vorausgesetzt.

Im Abschnitt 2 werden die wichtigsten Begriffe, die für die Behandlung von dynamischen Systemen notwendig sind, definiert. Im Abschnitt 3 wird dann das Feigenbaum-Diagramm am Beispiel von $f_a(x) = ax(1-x)$ abschnittsweise erläutert. Der Abschnitt 4 schließlich beschäftigt sich mit den Grundlagen der Juliamengen, nämlich deren Definition, Eigenschaften, und Zusammenhang mit der unter dem Name „Apfelmännchen“ bekannten Mandelbrotmenge.

Die Abbildungen zu Feigenbaum-Diagramm und Juliamengen entstanden mit einer veränderten Version der Programme FEIGEN.PAS und JULIA.PAS, die zusammen den praktischen Teil dieser Facharbeit darstellen und im Anhang A näher erläutert werden.

Wozu dynamische Systeme?

Die Ästhetik fraktaler Abbildungen ist natürlich nur ein Aspekt. Dynamische Systeme werden in der Chaos-Theorie, einem neuen Zweig der Naturwissenschaften, dazu verwendet, komplexe und unvorhersehbare Zusammenhänge zu beschreiben und besser zu verstehen.

Von zwei beliebig nahen Punkte der komplexen Zahlenebene kann einer zu einer Juliamenge gehören und der andere nicht. Das heißt, ein und dieselbe Iterationsvorschrift hält den einen Punkt gefangen, während sie den anderen ins Unendliche fliehen lässt. Genauso kann in der Natur eine sehr geringfügige Änderung des Ausgangszustands sehr unterschiedliche und mitunter sehr große Auswirkungen auf das Ergebnis haben. Ein viel zitiertes Beispiel ist der Flügelschlag eines Schmetterlings in Australien, der in Europa einen Sturm auslösen könnte.

Die Chaos-Theorie ist für praktisch alle Naturwissenschaften nützlich. So ist für die Meteorologen zum Beispiel die Veränderung der Wetterlage nicht mit rein mathematischen Mitteln berechenbar, Biologen können die Veränderung von Umweltindikatoren nicht hundertprozentig vorhersehen, und Gesellschaftsmodelle von Soziologen geben tatsächliche Entwicklungen im Voraus nie ganz genau wieder. Jede Wissenschaft, die sich mit komplexen Zusammenhängen beschäftigen muss, ist auf Modellvorstellungen angewiesen.

Natürlich werden mit der Chaos-Theorie unvorhersehbare Zusammenhänge nicht plötzlich vorhersehbar, aber sie bietet ein einfach (nämlich mit Hilfe eines Computers) zu simulierendes Modell und zeigt außerdem Gemeinsamkeiten auf unter den Wissenschaften, die sich mit *scheinbar* ganz unterschiedlichen Problemen auseinandersetzen müssen.

2 Begriffe

Einige grundlegende Begriffe werden in diesem Kapitel geklärt. Diese Definitionen finden sich auch in [1] S. 13.

2.1 Orbit

Sei f eine reelle Funktion $f: S \rightarrow S$ mit $S \subseteq \mathbb{R}$. $f^n(x)$ heißt dann *n-te Iterierte* von x , wobei $f^0(x) = x$, $f^1 = f(x)$, $f^2 = f(f(x))$ usw. bezeichne.

Die Folge von Iterierten x nennt man Orbit des Punktes x :

$$O_x := \{ x, f(x), f^2(x), \dots \}$$

bzw. $O_x := \{ f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$

$x \in S$ wird *Startwert* genannt. Diese Folge lässt sich auch iterativ beschreiben:

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0,$$

und stellt ein eindimensionales diskretes System dar.

Von Interesse bei der Analyse dynamischer Systeme ist das asymptotische Verhalten des Orbits, also $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$.

2.2 Fixpunkt

Ein Punkt x heißt *Fixpunkt* bzw. *Ruhepunkt*, falls gilt: $f(x) = x$. Ein Punkt x heißt *periodischer Punkt* oder *Fixpunkt der Periode k* , falls gilt: $f^k(x) = x$.

Ein Fixpunkt x heißt *Attraktor* bzw. *anziehender* oder *stabiler Fixpunkt*, falls gilt: $|f'(x)| < 1$. Es gibt dann eine Umgebung $U_\delta(x)$, so dass für alle $y \in U_\delta(x)$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$.

Ein Fixpunkt x heißt *Repellor* bzw. *abstoßender* oder *instabiler Fixpunkt*, falls gilt: $|f'(x)| > 1$. Es gibt dann eine Umgebung $U_\delta(x)$, so dass für alle $y \in U_\delta \setminus \{x\}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^n(y) \notin U_\delta(x)$ für alle $n \geq n_0$.

2.3 Flucht- und Gefangenemenge

Als Fluchtmenge F_c bezeichnet man die Menge aller Zahlen, deren Betrag bei der Iteration f_c^n mit $n \rightarrow \infty$ ins Unendliche wächst („flieht“):

$$F_c = \{ z_0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z_0)| = \infty \}$$

Die Gefangenemenge G_c ist genau das Komplement der Fluchtmenge F_c :

$$G_c = \{ z_0 \mid z_0 \notin F_c \}$$

3 Das Feigenbaum-Diagramm am Beispiel von $f_a(x) = ax(1-x)$

3.1 Das Feigenbaum-Diagramm

Eine wichtige Grafik im Bereich der dynamischen Systeme ist das *Feigenbaum-Diagramm*, das nach seinem „Entdecker“, dem Physiker Mitchell Feigenbaum, benannt ist. Es stellt die anziehenden Fixpunkte (Attraktoren) von eindimensional diskreten Systemen $f_a(x)$ in Abhängigkeit des Parameters a dar.

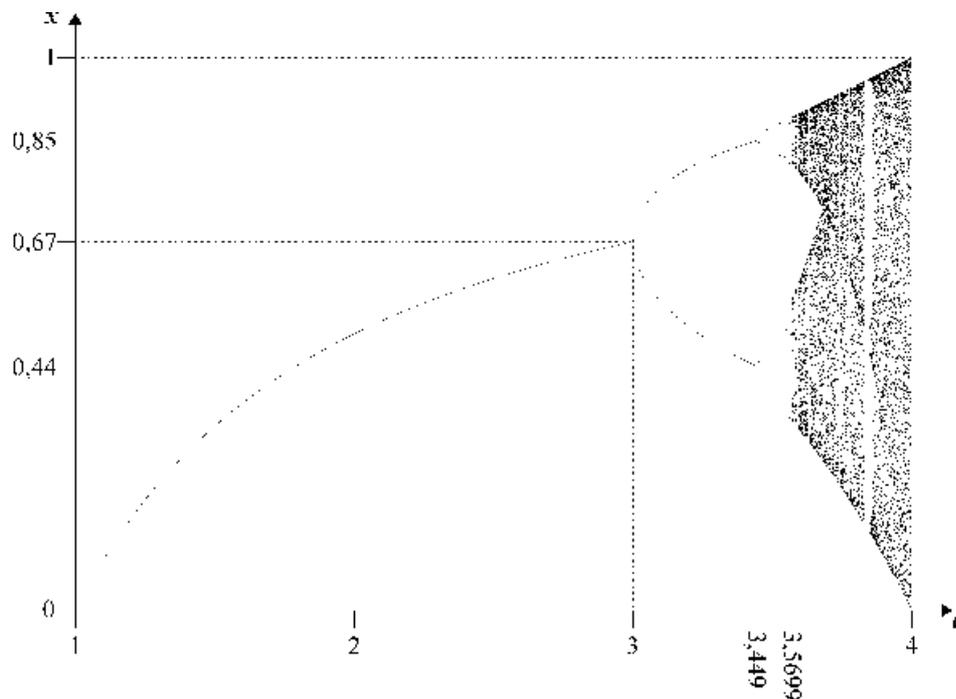


Abbildung 1: Das Feigenbaum-Diagramm

Im Bereich $a \in [1;3[$ existiert offenbar nur ein Attraktor. Für $a \in [3;3,449[$ aber wird dieser zum Repellor, und es entstehen aus ihm zwei neue anziehende Fixpunkte der Periode 2. Dieses Phänomen der *Periodenverdopplung* setzt sich im Bereich $a \in [3,449;3,5699[$ fort. Für $a \geq 3,5699$ schließlich stellt sich *Chaos* ein. Diese vier Bereiche sollen im folgenden näher betrachtet werden.

3.2 Der Bereich $a \in [1;3[$

Die Bedingung für einen Fixpunkt ist $f_a(x) = x$, hier also $ax(1-x) = x \Leftrightarrow x(-ax+a-1) = 0$. Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{a-1}{a}$ (mit $a \neq 0$).

Sie werden in $f'_a(x) = -2ax + a$ eingesetzt, um die Art der Fixpunkte festzustellen.

$$f'_a(0) = a$$

Da nur der Bereich $a \in]1;3[$ betrachtet wird, gilt: $|f'_a(x_1)| > 1$. x_1 ist also Repellor.

$$f_a' \left(\frac{a-1}{a} \right) = -2(a-1) + a = -a + 2$$

Da nur der Bereich $a \in]1;3[$ betrachtet wird, gilt: $|f_a'(x_2)| < 1$. x_2 ist also Attraktor.

Der Fall $a = 1$ muss gesondert betrachtet werden; hier existiert nämlich nur ein Fixpunkt $x = 0$.

3.3 Der Bereich $[3;3,449[$

Die beiden Fixpunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{a-1}{a}$ aus 3.2 existieren für $a \in [3;3,449[$ weiterhin. x_1

bleibt Repellor: $|f_a'(x_1)| = |a| > 1$. x_2 wird allerdings auch zum Repellor: $|f_a'(x_2)| = |-a + 2| > 1$ für $x > 3$.

Dafür entstehen zwei neue anziehende Fixpunkte der Periode 2. Man spricht von *Periodenverdopplung*. Es muss gelten $f_a^2(x) = x$, also $a(ax(1-x))(1-ax(1-x))-x = 0$.

$$-a^3x^4 + 2a^3x^3 - (a^2 + a^3)x^2 + (a^2 - 1)x = 0$$

Die erste bekannte Nullstelle $x_1 = 0$ ermöglicht das Ausklammern des Faktors x :

$$x(-a^3x^3 + 2a^3x^2 - (a^3 + a^2)x + (a^2 - 1)) = 0$$

Die zweite bekannte Nullstelle $x_2 = \frac{a-1}{a}$ ermöglicht das Ausklammern des Faktors $x - \frac{a-1}{a}$:

$$x(x - \frac{a-1}{a})(-a^3x^2 + (a^3 + a^2)x - (a^2 + a)) = 0$$

Die Faktoren von x und $x - \frac{a-1}{a}$ liefern die beiden schon bekannten Fixpunkte. Interessant sind nun die Lösungen von $-a^3x^2 + (a^3 + a^2)x - (a^2 + a) = 0$:

$$x_{3,4} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a}$$

Auf den Beweis, dass $|f_a^2(x_{3,4})| < 1$ für $x \in [3;3,449[$ und somit $x_{3,4}$ Attraktoren sind, wird hier auf Grund der Komplexität bewusst verzichtet.

Die linke Seite ($a = 3$) muss auch hier wieder gesondert betrachtet werden. Hier existiert nur ein Attraktor $x = \frac{2}{3}$.

3.4 Der Bereich $[3,449;s_\infty[$

Die Periodenverdopplung setzt sich für $a \geq 3,449$ nach demselben Schema fort: Die vorher m anziehenden Fixpunkte der Periode m werden abstoßend, und es entstehen $2m$ neue anziehende Fixpunkte der Periode $2m$. Der Rechenaufwand, um die Fixpunkte analytisch zu bestimmen, steigt von Periodenverdopplung zu Periodenverdopplung (man muss jeweils ein

Polynom 2^m -ten Grades lösen), so dass der Einsatz des Computers und die numerisch-grafische Lösung sinnvoll wird.

Das Verhältnis der Abstände d_k einer Periodenverdopplung zur nächsten Periodenverdopplung verhält sich ungefähr wie δ zu 1 (*Feigenbaum-Konstante* $\delta \approx 4,669202$). Das heißt, die Abstände werden kontinuierlich kleiner und streben gegen 0. Daraus folgt, dass es einen Parameter a geben muss, auf dessen rechter Seite die Äste des Baumes nicht weiter wachsen können. Dieser Punkt existiert tatsächlich. Man bezeichnet diesen Punkt a als *Feigenbaum-Punkt* $a = s_\infty \approx 3,5699456$.

3.5 Der Bereich $[s_\infty; \infty[$ (*Chaos*)

Der Bereich rechts des Feigenbaum-Punktes unterscheidet sich grundlegend von dem Periodenverdopplungsbaum auf der linken Seite. Es scheinen keine Attraktoren mehr zu existieren, die Werte von $f_a^n(x)$ springen wild durcheinander. Die Ordnung der Periodenverdopplungen ist also dem *Chaos* gewichen. (Der Begriff *Chaos* soll hier nicht definiert werden.)

Dass schon eine kleine Änderung des Parameters c an einer Stelle weit hinter dem Komma den Übergang ins Chaotische verursacht, bezeichnet man als *sensitive Abhängigkeit* von den Ausgangsbedingungen.

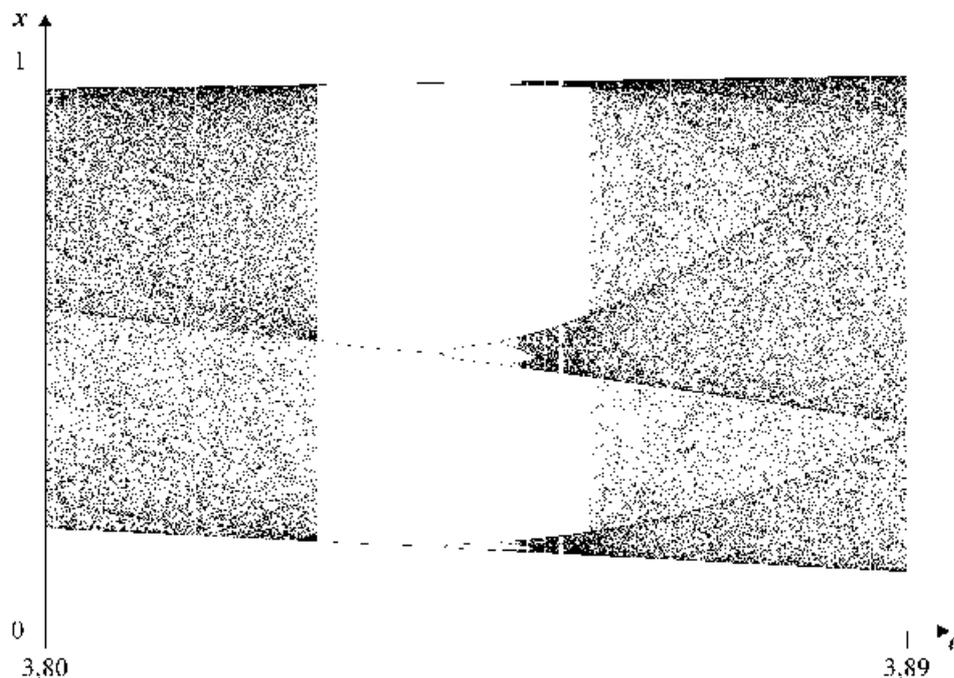


Abbildung 2: Feigenbaum-Diagramm in Bereich $a \in [3,80;3,89]$

Bei der Betrachtung des Bereichs $a \in [3,80;3,89]$ erkennt man, dass mitten im Chaos wieder ein kleines, vertikal gespiegeltes Feigenbaum-Diagramm existiert. Schaut man sich dieses kleine Feigenbaum-Diagramm wieder näher an, entdeckt man noch ein kleineres usw. Man nennt dieses Phänomen *Selbstähnlichkeit*.

4 Die Juliamengen

4.1 Definition

Die Juliamengen J_c sind die vom Parameter c abhängigen Mengen aller komplexer Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die $f_c: z \rightarrow z^2+c$ mit $z, c \in \mathbb{C}$ nicht bestimmt divergiert, also

$$J_c = \{ z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z)| \neq \infty \}$$

Die Mengen lassen sich grafisch darstellen, indem man jeden Punkt $z \in J_c$ in der komplexen Zahlenebene einträgt.

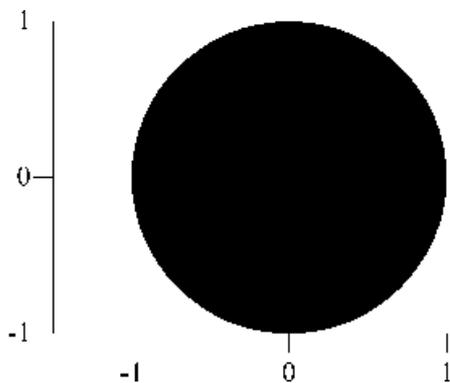


Abbildung 2a: J_c mit $c=0$

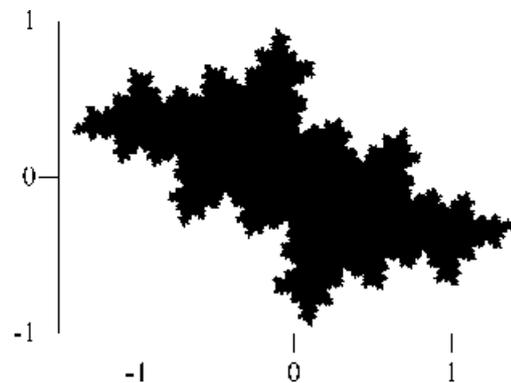


Abbildung 2b: J_c mit $c = -0,5 + 0,5i$

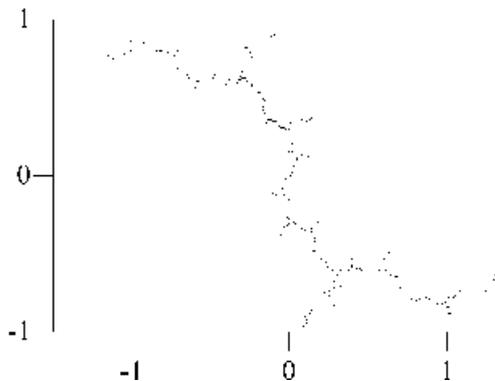


Abbildung 2c: J_c mit $c = i$

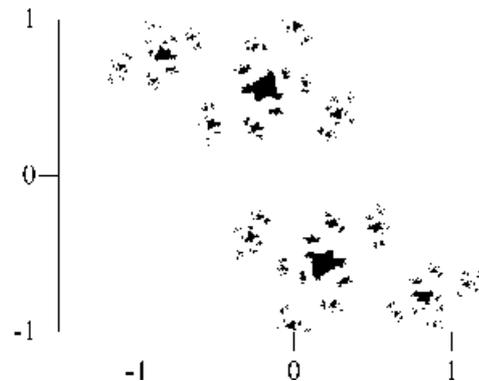


Abbildung 2d: J_c mit $c = 0,1 + 0,75i$

Anm.: Teilweise wird auch nur die Grenze zwischen Gefangenenmenge und Fluchtmenge, also hier die Grenze zwischen dem schwarzen und weißen Bereich, als Juliamenge bezeichnet. In dieser Arbeit soll der Begriff Juliamenge jedoch für die Gefangenenmenge verwendet werden.

4.2 Die Juliamenge J_0

Die einfachste Juliamenge stellt J_0 dar. Sie besteht lediglich aus einer Kreisscheibe mit dem Radius 1 um den Ursprung des Koordinatensystems.

Das ist leicht nachvollziehbar. Geometrisch bedeutet das Quadrieren einer komplexen Zahl, dass der Betrag $|z|$ auf die gewohnte Weise quadriert wird. Der Winkel $\arg z$ wird verdoppelt.

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = \infty$ für $|z| > 1$, sind genau diejenigen komplexen Zahlen z mit $|z| > 1$, also diejenigen Punkte außerhalb des Einheitskreises, nicht Elemente der Juliamenge J_0 , da $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z)| = \infty$ für diese z .

4.3 Symmetrie

Satz. Jede Juliamenge J_c ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Beweis.

Sei $z \in J_c$ mit $z = x+iy$. Es muss gelten: $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z)| \neq \infty$.

Der Punkt $-z$ liegt zu z punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs:

$$-z = -(x+iy) = -x-i(-y).$$

Nach der ersten Iteration erhält man

$$f_c(-z) = (-z)^2 + c = (-x-iy)^2 + c = x^2 + 2ixy - y^2 + c = (x+iy)^2 + c = z^2 + c = f_c(z).$$

Für die weiteren Iterationen ergibt sich also

$$f_c^n(-z) = f_c^{n-1}(f_c(-z)) = f_c^{n-1}(f_c(z)) = f_c^n(z)$$

und somit auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(-z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) \neq \infty.$$

Aus $z \in J_c$ folgt daher $-z \in J_c$, d.h. jede Juliamenge J_c ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

4.4 Beschränktheit

Satz. Die Juliamenge J_c ist beschränkt und liegt im Inneren des Kreises $|z| = r(c)$ mit $r(c) = \max(|c|, 2)$.

Beweis. Für den Anfangswert z der Iteration nehmen wir an, dass

$$|z| \geq |c| \text{ (*) und } |z| > 2$$

erfüllt ist. Dann existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit $|z| = 2 + \varepsilon$ (**). Aus der Dreiecksungleichung (FSM, S. 12) folgt

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

Wenn man diese Ungleichung nach $|z^2 + c|$ auflöst, erhält man

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - |c|$$

$$|z^2 + c| \geq |z|^2 - |c|$$

Aus (*) folgt:

$$|z^2 + c| \geq |z|^2 - |z|$$

$$|z^2 + c| \geq (|z| - 1) |z|$$

Aus (***) folgt:

$$|z^2 + c| \geq (1 + \varepsilon) |z|$$

oder allgemein:

$$|f_c(z)| \geq |z|$$

Das heißt, dass bei jeder Iteration der Betrag von z mindestens um den Faktor $1 + \varepsilon > 1$ anwächst. Daraus folgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z)| = \infty$ für $|z| > \max(|c|, 2)$.

Die komplexen Zahlen z mit $|z| > \max(|c|, 2)$ gehören daher nicht zu der Juliamenge J_c .

4.5 Zusammenhang mit der Mandelbrotmenge

Die grafische Darstellung der Mandelbrotmenge ist unter dem Namen „Apfelmännchen“ sehr bekannt. Weniger bekannt ist der Zusammenhang zwischen Mandelbrot- und Juliamengen.

Die Mandelbrotmenge M ist die Menge aller komplexen Zahlen $c \in \mathbb{C}$, für die $f_c(z) = z^2 + c$ nicht bestimmt divergiert, das heißt:

$$M = \{ c \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(0)| \neq \infty \}.$$

Die auf den ersten Blick ersichtliche Gemeinsamkeit ist die Funktionsvorschrift der Funktion $f_c(z)$, die in beiden Fällen iteriert wird. Bei den Juliamengen J_c wird jedoch der Parameter c vorgegeben, und die komplexen Zahlen z , für die die Iteration nicht gegen Unendlich läuft, sind deren Elemente, während bei der Mandelbrotmenge M der Startwert $z_0 = 0$ vorgegeben wird und die komplexen Zahlen c , für die die Iteration nicht gegen Unendlich läuft, deren Elemente sind.

Ein weiterer Zusammenhang ist folgender:

Satz. Für $c \in M$ ist die Menge J_c zusammenhängend. Für $c \notin M$ dagegen zerfällt Sie in unendlich viele Teilkomponenten.

A Die Programme FEIGEN.PAS und JULIA.PAS

Als Anlage ist dieser Facharbeit eine Diskette beigelegt. Auf dieser Diskette befinden sich unter anderem die Programme FEIGEN.PAS und JULIA.PAS, mit denen sich Feigenbaum-Diagramm bzw. Juliamengen auf dem Bildschirm darstellen lassen. Die Grafiken dieser Facharbeit wurden mit einer weiterentwickelten Version erstellt, die die Grafikdaten mit einer deutlich höheren Auflösung direkt in eine Datei schreibt.

Die Programme wurden auf einem IBM-kompatiblen PC („Marke Eigenbau“) erstellt. Die verwendete Programmiersprache ist Turbo Pascal 6.0 für DOS. Voraussetzung für die Lauffähigkeit der Programme ist eine VGA-kompatible Grafikkarte sowie die Datei EGAVGA.BGI, die sich ebenfalls auf der beigelegten Diskette befindet.

1 Das Programm FEIGEN.PAS

```

1 uses Crt, Graph;
2 const xfrom : Real = 0;
3     xto   : Real = 1;
4 var   Gdriver, GMode           : Integer;
5     afrom, ato, xstep, astep, x : Real;
6     a, n                       : Word;
7 begin
8     repeat Write('kleinstes a: '); ReadLn(afrom); until (afrom>=1) and (afrom<4);
9     repeat Write('größtes a:   '); ReadLn(ato); until (ato>afrom) and (ato<=4);
10    GDriver := VGA; GMode := VGAHi; InitGraph(GDriver,GMode,'\');
11    xstep := (xto-xfrom)/(GetMaxY+1); astep := (ato-afrom)/(GetMaxX+1);
12    for a := 0 to GetMaxX do begin
13        x := 0.5;
14        for n := 1 to 1000 do x := (a*astep+afrom)*x*(1-x);
15        for n := 1 to 200 do begin
16            x := (a*astep+afrom)*x*(1-x);
17            PutPixel(a,GetMaxY-Trunc((x-xfrom)/xstep),15);
18        end;
19    end;
20    repeat until KeyPressed;
21    CloseGraph;
22 end.
```

Das Programm beginnt mit der Aufforderung zur Eingabe des Bereichs, für den das Feigenbaum-Diagramm dargestellt werden soll, und speichert Anfang und Ende des Intervalls in den Variablen `afrom` und `ato`. Mögliche Werte sind 1 bis 4. Der eigentliche Algorithmus ist die `for`-Schleife in den Zeilen 12 bis 19, die für jede Bildschirmspalte, also für jeden darstellbaren Wert für `a`, einmal durchlaufen wird. Innerhalb dieser Schleife wird die Iteration, startend bei $x=0,5$, 1000 mal durchgeführt (Z. 14). Erst die nächsten 200 Iterationen werden auf dem Bildschirm dargestellt (Z. 17). So entsteht auf dem Bildschirm ein Feigenbaum-Diagramm bzw. ein Ausschnitt daraus. Das Programm wird mit einer beliebigen Taste beendet.

2 Das Programm JULIA.PAS

```

1 uses Crt, Graph;
2 var
3   GDriver, GMode           : Integer;
4   xfrom, xto, xstep        : Real;
5   yfrom, yto, ystep        : Real;
6   cre, cim, zre, zim, zreneu, zimneu : Real;
7   n                        : Byte;
8   x, y                     : Word;
9 begin
10  repeat Write('kleinstes x: '); ReadLn(xfrom); until (xfrom>=-2.67) and (xfrom<2.67);
11  repeat Write('größtes x:   '); ReadLn(xto); until (xto>xfrom) and (xto<=2.67);
12  repeat Write('kleinstes y: '); ReadLn(yfrom); until (yfrom>=-2) and (yfrom<2);
13  repeat Write('größtes y : '); ReadLn(yto); until (yto>yfrom) and (yto<=2);
14  repeat Write('Re(c):      '); ReadLn(cre); until (Abs(cre)<=2);
15  repeat Write('Im(c):      '); ReadLn(cim); until (Abs(cim)<=2);
16  GDriver := VGA; GMode := VGAHi; InitGraph(GDriver,GMode,'\');
17  xstep := (xto-xfrom)/(GetMaxX+1); ystep := (yto-yfrom)/(GetMaxY+1);
18  for x := 0 to GetMaxX do begin
19    for y := 0 to GetMaxY do begin
20      zre := x*xstep+xfrom;
21      zim := y*ystep+yfrom;
22      n := 0;
23      repeat
24        zreneu := zre*zre-zim*zim+cre;
25        zimneu := 2*zre*zim+cim;
26        zre := zreneu;
27        zim := zimneu;
28        Inc(n);
29      until (zre*zre+zim*zim>4) or (n=20);
30      if (zre*zre+zim*zim<4) then PutPixel(x,GetMaxY-y,15);
31    end;
32  end;
33  Write(#7); repeat until KeyPressed;
34  CloseGraph;
35 end.

```

Das Programm beginnt mit der Aufforderung zur Eingabe des Bereichs, für das die Julia-menge dargestellt werden soll, und speichert die Grenzen der Intervalle für x und y in den Variablen $xfrom$, xto , $yfrom$ und yto , wobei x $\operatorname{Re}(z)$ und y $\operatorname{Im}(z)$ entspricht. Es ist sinnvoll, die Werte so einzugeben, dass sich ein Verhältnis 4:3 ergibt, so dass die Abbildung am Bildschirm nicht verzerrt wird. Der eigentliche Algorithmus sind die verschachtelten zwei `for`-Schleifen in den Zeilen 18 bis 32, die für jedes Pixel, also für jeden darstellbaren Wert für z , einmal durchlaufen werden. Innerhalb dieser Schleifen wird die Iteration $z_{n+1} = z^2 + c$ (aufgespalten in Realteil x und Imaginärteil y , Z. 24f) so lange durchgeführt, bis z „abhaut“ (d.h. sich außerhalb Kreises mit dem Radius 2 um den Ursprung befindet), höchstens aber zwanzig mal (Z. 29). Befindet sich z dann immer noch innerhalb des Kreises mit Radius 2 um den Ursprung, so wird der entsprechende Bildschirmpunkt weiß dargestellt (Z. 30). So entsteht auf dem Bildschirm eine Julia-Abbildung bzw. ein Ausschnitt daraus. Das Programm wird mit einer beliebigen Taste beendet.

Anm.: In der Literatur wird häufig der (schnellere) Algorithmus der Umkehriteration verwendet. Dieser hat aber den Nachteil, dass er nur den Rand der Juliamenge darstellt, und

diesen unter Umständen nicht einmal vollständig, da Zufallszahlen als Startwert für die Umkehriteration verwendet werden. Der Algorithmus in JULIA.PAS dagegen entscheidet für jeden einzelnen Bildschirmpunkt, ob er zur Juliamenge gehört oder nicht, und ist daher genauer.

Anm.: Auf der Diskette befindet sich außerdem eine benutzerfreundlichere Version JULIA3.PAS, mit der die Auswahl des darzustellenden Bereichs mit Hilfe der Cursor-Tasten möglich ist. So lässt sich auf eindrucksvolle Weise immer weiter in die Juliamenge „hineinzoomen“. Die Bedienung soll nicht hier erläutert werden, sondern in der Datei JULIA3.TXT, die sich ebenfalls auf der beigelegten Diskette befindet.

Literatur

- [1] Zeitler, Herbert und Neidhardt, Wolfgang. Fraktale und Chaos – Eine Einführung. Wiss. Buchges., Darmstadt, 1993
- [2] Peitgen, Heinz-Otto, Jürgens, Hartmut und Saupe, Dietmar. Chaos – Bausteine der Ordnung. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Klett-Cotta-Verlag, Stuttgart, 1994
- [3] Behr, Reinhart. Ein Weg zur fraktalen Geometrie. Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, 1989.
- [4] Lasser, Tobias. Facharbeit aus der Mathematik. Ernst-Mach-Gymnasium, Haar, 1996/1998

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Unterschrift des Kollegiaten